

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**С. Л. Кривий**

**ЕЛЕМЕНТИ НЕКЛАСИЧНОЇ  
МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ**

Видавничий центр "Кафедра"  
Київ - 2026

УДК 510.64

К 82

Рецензенти:

*д-р фіз.-мат. наук, проф., Терещенко В.М.*

*(Київський національний університет імені Тараса Шевченка).*

*д-р техн. наук, проф., Погорілий С.Д.*

*(Київський національний університет імені Тараса Шевченка)*

*Рекомендовано до друку*

*вченою радою факультету комп'ютерних наук та кібернетики*

*(протокол № 12 від 14 червня 2023 року)*

*Ухвалено науково-методичною радою*

*Київського національного університету імені Тараса Шевченка*

*(протокол № 10-23 від 2 листопада 2023 року)*

**Кривий С.Л.**

К 82 Елементи неklasичної математичної логіки: Підручник. – К.: ВЦ “Кафедра”,

2026. – 608 с.

ISBN 978-966-2711-98-1

Розглянуто основні логічні мови, які мають назву неklasичних. Оскільки ці логічні мови включають елементи класичних логік, то спочатку наводяться класичні логіки — логіка висловлювань і логіка предикатів. А потім на їх основі вводяться неklasичні логіки: багатозначні, нечіткі, модальні, мультимодальні, динамічні, темпоральні та дескриптивні. Представлені приклади застосування цих логік до аналізу природомовних текстів та верифікації дискретних систем, які моделюються транзиторними системами. Крім цих логічних мов в додатках представлені огляди проблеми уніфікації в теоріях першого порядку та застосування булевих функцій для ефективного зображення дискретних систем.

Для викладачів, наукових співробітників, аспірантів, здобувачів вищої освіти за напрямками «Комп'ютерні науки», «Програмна інженерія», «Програмне забезпечення систем».

УДК 510.64

ISBN 978-966-2711-98-1

© Кривий С.Л., 2026

© Видавничий Центр “Кафедра”, 2026

# Передмова

*Математична логіка*, яку інколи називають *символічною логікою*, є наукою, яка вивчається за допомогою математичних методів. Логікою ми користуємося в повсякденному житті, чи то в дискусіях, чи в наукових доповідях, чи у поведінці. Математичну логіку використовують для систематизації наукового знання і, зокрема, знання математичного.

Отже, зібравшись вивчати математичну логіку за допомогою математичних методів, ми зустрічаємося з такою парадоксальною ситуацією: *невже щоб вивчати математичну логіку за допомогою математики, нам не доведеться користуватися самою логікою?*

Цю ситуацію пояснюють просто: необхідно розрізнити логіку, яку ми вивчаємо, і логіку, за допомогою якої це вивчення відбувається. Це означає, що необхідно розрізнити відповідні логіки: логіка яка вивчається, формулюється на одній мові, яку називають **предметною** або **об'єктною** (оскільки ця мова є об'єктом вивчення), а мову, за допомогою якої ми досліджуємо предметну мову, називають **метамовою**.

Про цю різницю між логікою, яка вивчається, і логікою, яка є засобом такого вивчення, слід весь час пам'ятати.

Історично формальну логіку як науку започаткував Арістотель більше 2500 років тому, сформулювавши основні її принципи. Ці принципи лягли в основу формальної логіки і вони давали можливість вести дискусії, не опираючись на чийсь авторитет, а на основі формальних правил. Фундамент, закладений Арістотелем, протримався більше двох тисячоліть. Що стосується математичної логіки, то вона довгий час залишалася на узбіччі магістральних шляхів розвитку математичної науки. Переломним стало XIX ст., коли математика почала переходити на теоретико-множинну основу. Цей перехід виявив багато проблем, які стосувалися самих основ математики, у зв'язку з появою суперечностей логічного характеру. Вихід був знайдений у формі аксіоматичного формально логічного обґрунтування. Тут і знадобилися логічні мови, в термінах яких формулювалися аксіоматичні системи теорії множин. Ці мови отримали назви *логіка висловлювань* і *логіка предикатів*, які в подальшому дістали загальну назву **класичні логіки**. Майже століття ці логіки склали основу предмета *Математична логіка*.

У другій половині ХХ ст. відбувається новий етап розвитку математичної логіки у зв'язку з появою комп'ютерів і мов програмування та самих програм. З одного боку необхідно було розробляти основи побудови комп'ютерної техніки, а з другого – будувати коректне програмне забезпечення. Перша проблема переважно опиралася на логіку висловлювань та її модель – булеву алгебру, а розв'язання другої проблеми визначило шляхи і потреби в нових логічних мовах. Ця проблема стала каталізатором появи нових класів мов і методів та алгоритмів, з ними пов'язаних. Нові класи логічних мов отримали назву **некласичні логіки**.

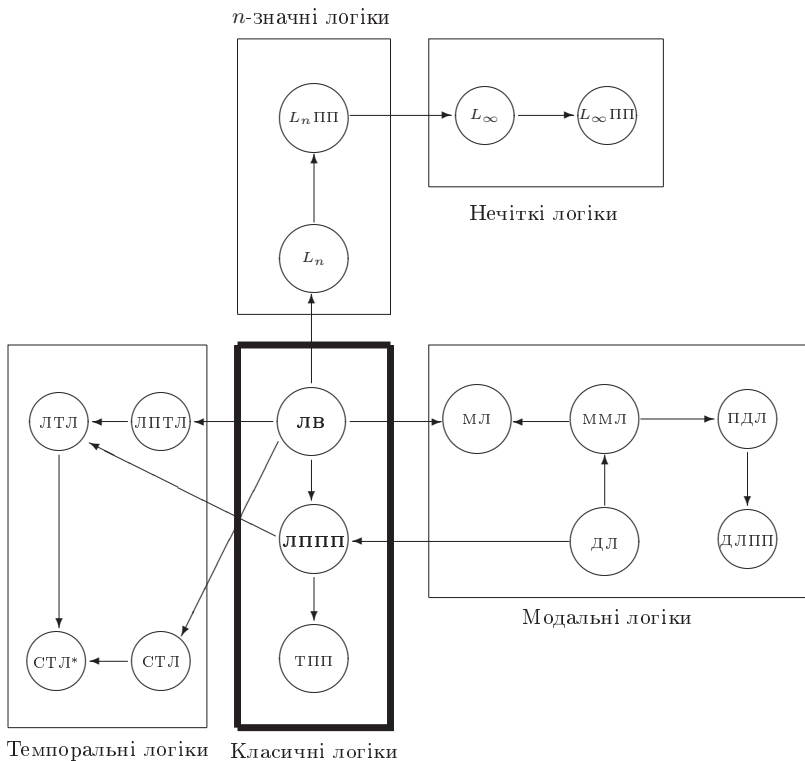
Саме некласичні логіки і є основним об'єктом розгляду у підручнику, які застосовують до верифікації програмного і технічного забезпечення систем. Але першими розглянуто класичні логічні мови, оскільки вони служать основою для побудови некласичних логічних мов. Для класичних логік описано основні методи пошуку наслідків – метод семантичного таблиці і метод резолюцій (для застосування методу резолюцій у підрозділі 5.1 представлено огляд проблеми уніфікації в екваціональних теоріях першого порядку).

Далі розглянуто некласичні логічні мови – багатозначні (різновиди тризначних логік представлено у підрозділі 5.2), нечіткі, модальні, мультимодальні, динамічні, темпоральні та дескриптивні логіки (нижче наведено діаграму зв'язків між логіками).

Кожну із цих логік представлено відповідною аксіоматикою та властивостями, які випливають із цієї аксіоматики. Аксіоматичний метод вибрано тому, що в ньому чітко визначаються не тільки початкові поняття, записані у вигляді аксіом, а і дозволені способи міркування. Більше того, і аксіоми, і дозволені логічні переходи повинні бути оформлені так, щоб перші могли використовуватися, а другі виконуватися суто формально без проникнення в їхній зміст так, щоб і ті, й інші можна було реалізовувати на комп'ютері.

Основними застосуваннями представлених логік у підручнику є аналіз природномовних текстів і верифікація. Моделями у верифікації виступають **транзиційні системи (ТС)**, які беруть свій початок із теорії автоматів. ТС з успіхом використовують як семантичні моделі високорівневого формалізму для паралельних і розподілених систем, представлених алгеброю процесів, мережами Петрі, скінченними автоматами. Переходи і стани в ТС розмічають, і ці позначки використовують для дослідження властивостей процесів у реальних системах.

З логічного погляду реальна система і її математична модель становлять семантичну модель, а властивості такої моделі описують логічними формулами, сукупність яких називають **специфікацією системи**. Відтак проблема коректності і виконаності специфікацій полягає у перевірці істинності формул на моделі. Отже, для виконання такої верифікації необхідно мати *логічну мову*, в якій формулюються властивості системи, і *алгоритм* верифікації.



**Діаграма зв'язків між логіками**

Зазвичай систему, яку потрібно верифікувати, моделюють за допомогою ТС, а її властивості формулюють у відповідній некласичній логіці. Транзиційні системи відіграють у таких застосуваннях роль семантичних моделей реальних систем. Процедуру перевірки виконаності специфікацій системи формулюють як процедуру визначення того, будуть чи ні стани і переходи ТС задовольняти очікуваним властивостям системи.

Такий метод верифікації систем дістав назву **model checking** (МС) і став одним із найефективніших методів верифікації завдяки тому, що він повністю автоматичний. Цей метод має багато переваг над традиційними методами (тестуванням, дедуктивним виведенням, імітаційним моделюванням), і він з успіхом застосовується до верифікації мікропроцесорної техніки, протоколів взаємодії, контролерів, регуляторів дорожнього руху, ліфтів, операційних систем, протоколів комунікації (інтернету, телефонії, баз даних) тощо.

У разі використання МС користувач повинен дати модель системи і сформульовані властивості, виконання яких потрібно перевірити. Але цілковита автоматизація методу вимагає від МС-алгоритму обходу всіх досяжних станів транзиційної системи. Це можливо лише у разі скінченної множини станів. Багато реальних систем, таких як послідовні ланцюги чи мережі протоколів, мають скінченну кількість станів (насправді всі електронні машини мають обмежений об'єм пам'яті й оперують лише з арифметикою чисел обмеженої розрядності). Більше того, в процесі проектування з високим рівнем надійності часто можна відокремити структуру управління (скінченну кількість станів) від структури даних (нескінченну кількість станів) у заданому модулі. Нарешті, в багатьох випадках можна редукувати нескінченну область до скінченної так, щоб зберігались властивості. Але навіть у разі скінченної ТС кількість її станів може бути астрономічним числом. Тому основною проблемою у застосуванні МС є велика кількість станів: якщо довільний стан системи однозначно описується  $n$  бітами, то може бути  $2^n$  досяжних станів у системі. Застосування упорядкованих бінарних діаграм розв'язків (так звані OBDD – ordered binary decision diagrams) розширило можливості МС і дало змогу верифікувати системи індустріальних розмірів (OBDD представлено у підрозділі 5.3).

Кожний із підрозділів закінчується набором задач і вправ, з метою кращого засвоєння теоретичного матеріалу.

*Автор*

# Зміст

Список скорочень, алфавіти . . . . .	3
Передмова . . . . .	5
<b>1 ЛОГІКИ КЛАСИЧНІ . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1 ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ . . . . .	9
1.1.1 Синтаксис і семантика ЛВ . . . . .	9
1.1.2 Повні системи зв'язок . . . . .	14
1.1.3 Аксиоматична система ЧВ . . . . .	16
1.1.4 Теорема дедукції . . . . .	20
1.1.5 Основні властивості ЧВ . . . . .	21
1.1.6 Несуперечність і повнота ЧВ . . . . .	27
1.1.7 ЧВ і булева алгебра . . . . .	31
1.1.8 Методи доведення тавтологій у ЧВ . . . . .	34
1.1.9 Аналіз природномовних текстів . . . . .	45
1.2 ЛОГІКА ПРЕДИКАТИВ . . . . .	57
1.2.1 Синтаксис: алфавіт, терми, формули . . . . .	57
1.2.2 Семантика: виконуваність, інтерпретації, моделі . . . . .	60
1.2.3 Істинність у скінченних інтерпретаціях . . . . .	63
1.2.4 Ізоморфізм інтерпретацій . . . . .	65
1.2.5 Виразність мов . . . . .	67
1.2.6 Аксиоматична система ЧППП . . . . .	68
1.2.7 Основні властивості ЧППП і теорій першого порядку . . . . .	71
1.2.8 Нормальні форми формул ЧППП . . . . .	83
1.2.9 Сколемівські стандартні форми . . . . .	86
1.2.10 Метод резолюцій у ЧППП . . . . .	89
1.2.11 Алгоритм уніфікації . . . . .	91
1.2.12 Повнота методу резолюцій . . . . .	95
1.2.13 Аналіз природномовних текстів . . . . .	97
1.2.14 Метод семантичного таблицю в ЧППП . . . . .	105
1.2.15 Логіки вищих порядків . . . . .	113

<b>2</b>	<b>ЛОГІКИ НЕКЛАСИЧНІ</b>	<b>120</b>
2.1	БАГАТОЗНАЧНІ ЛОГІКИ . . . . .	120
2.1.1	Пропозиційна $L_3$ -логіка . . . . .	120
2.1.2	Аксиоматична система $L_3$ -логіки . . . . .	124
2.1.3	Апаратна перевірка виконуваності $L_n$ -формул . . . . .	133
2.1.4	$L_3$ -логіка Лукасевича розширена . . . . .	134
2.1.5	P-стиль виведення для $L_3$ -логіки . . . . .	136
2.1.6	$L_3$ -логіка першого порядку . . . . .	146
2.1.7	Аксиоматика $L_3\forall$ -логіки . . . . .	151
2.1.8	P-стиль виведення в $L_3\forall$ -логіці . . . . .	154
2.2	НЕЧІТКІ ЛОГІКИ . . . . .	162
2.2.1	Нечітка пропозиційна логіка . . . . .	162
2.2.2	Тавтології, суперечність, слідування в $F_L$ . . . . .	164
2.2.3	N-тавтології, ступені слідування . . . . .	167
2.2.4	Нечітке слідування . . . . .	174
2.2.5	Аксиоматична система $F_L A$ . . . . .	177
2.2.6	P-стиль виведення в $F_L$ -логіці . . . . .	183
2.2.7	Нечітка логіка першого порядку . . . . .	195
2.2.8	Тавтології та інші семантичні поняття . . . . .	198
2.2.9	Система P-стилю виведення . . . . .	199
2.3	МОДАЛЬНІ ЛОГІКИ . . . . .	204
2.3.1	Пропозиційна модальна логіка . . . . .	204
2.3.2	Аксиоматична система ПМЛ . . . . .	209
2.3.3	Бінарні відношення і різновиди ПМЛ . . . . .	210
2.3.4	Мультимодальна логіка . . . . .	213
2.3.5	Аксиоматична система ММЛ . . . . .	213
2.4	ЛОГІКИ ДИНАМІЧНІ . . . . .	218
2.4.1	Пропозиційна динамічна логіка . . . . .	218
2.4.2	Дедуктивна система ПДЛ . . . . .	222
2.4.3	Логіка Хоара . . . . .	228
2.4.4	Властивість малої моделі . . . . .	230
2.4.5	Фільтрація . . . . .	231
2.4.6	Фільтрація в нестандартних моделях . . . . .	232
2.4.7	Дедуктивна повнота ПДЛ . . . . .	233
2.4.8	Складність проблеми виконуваності в ПДЛ . . . . .	234
2.4.9	Приклади застосування ПДЛ . . . . .	236
2.4.10	Динамічна логіка першого порядку . . . . .	242
2.4.11	Семантика ДНЛПП . . . . .	244
2.4.12	Складність проблеми обґрунтування . . . . .	249
2.4.13	Дедуктивна система для фрагмента ДНЛПП . . . . .	250
2.5	ЛОГІКИ ТЕМПОРАЛЬНІ . . . . .	254
2.5.1	Лінійна пропозиційна темпоральна логіка . . . . .	254
2.5.2	Аксиоматична система для ЛПТЛ . . . . .	256
2.5.3	Метод семантичного таблицю для ЛПТЛ . . . . .	266

2.5.4	Побудова моделі із семантичного табло . . . . .	269
2.5.5	Приклад застосування ЛПТЛ . . . . .	274
2.5.6	Лінійна темпоральна логіка . . . . .	278
2.5.7	Аксиоматична система ЛТЛ . . . . .	279
2.5.8	Позитивна нормальна форма ЛТЛ-формул . . . . .	281
2.5.9	Трансляція ЛТЛ у логіку предикатів . . . . .	281
2.5.10	ЛТЛ і скінченні автомати . . . . .	284
2.5.11	Виконуваність ЛТЛ-формул та істинність . . . . .	297
2.5.12	Логіка розгалуженого часу . . . . .	298
2.5.13	Еквівалентність STL-формул . . . . .	307
2.5.14	Нормальна форма STL-формул . . . . .	309
2.5.15	Виразність STL і ЛТЛ . . . . .	311
2.5.16	Аксиоматична система STL . . . . .	313
2.5.17	Процедури розв'язуваності для STL . . . . .	314
2.5.18	STL-перевірка на моделі . . . . .	317
2.5.19	Уточнений STL-mod-check . . . . .	323
2.5.20	Темпоральна логіка STL* . . . . .	327
2.5.21	Аксиоматична система STL* . . . . .	331
2.5.22	STL*-перевірка на моделі . . . . .	332
2.6	ДЕСКРИПТИВНІ ЛОГІКИ . . . . .	336
2.6.1	Атрибутна мова $\mathcal{AL}$ . . . . .	336
2.6.2	Сім'я $\mathcal{AL}$ -мов . . . . .	337
2.6.3	Логіка $\mathcal{ALL}$ . . . . .	338
2.6.4	Вкладення логіки $\mathcal{ALL}$ в логіку предикатів . . . . .	340
2.6.5	Вкладення логіки $\mathcal{ALL}$ в модальну логіку . . . . .	342
2.6.6	Термінології . . . . .	343
2.6.7	Факти, ABox і бази знань . . . . .	350
2.6.8	Приклад предметної області і її термінології . . . . .	356
2.6.9	Алгоритм СТ для логіки $\mathcal{ALL}$ . . . . .	358
2.6.10	Алгоритм СТ для $\mathcal{ALL}$ без термінології . . . . .	359
2.6.11	Алгоритм СТ для $\mathcal{ALL}$ з термінологіями . . . . .	367
2.6.12	Складність проблеми виконуваності в $\mathcal{ALL}$ . . . . .	372
2.6.13	Розширення логіки $\mathcal{ALL}$ . . . . .	373
2.6.14	Логіки з аксіомами для ролей . . . . .	381
2.6.15	Чисельні обмеження на транзитивні ролі . . . . .	384
2.6.16	Логіки з операціями для ролей . . . . .	385
2.6.17	Властивості ДЛ з операціями для ролей . . . . .	387
2.6.18	Нерозв'язувані ДЛ з операціями для ролей . . . . .	389
2.6.19	Логіка з рівністю для атрибутів . . . . .	390
2.6.20	Запити до бази знань . . . . .	391
2.6.21	Відношення включення між запитами . . . . .	393
2.6.22	Алгоритмічні проблеми для запитів . . . . .	396
2.6.23	Логіки з $n$ -арними відношеннями . . . . .	398

<b>3</b>	<b>МОДЕЛІ І ВЕРИФІКАЦІЯ</b>	<b>408</b>
3.1	ТРАНЗИЦІЙНІ СИСТЕМИ . . . . .	408
3.1.1	Основні означення . . . . .	409
3.1.2	Виконання в ТС . . . . .	413
3.1.3	Шляхи і траси в ТС . . . . .	414
3.2	КОМПОЗИЦІЇ ТС . . . . .	415
3.2.1	Вільний добуток ЕТС . . . . .	415
3.2.2	Добутки ЕТС . . . . .	416
3.2.3	Добуток ТС і МП . . . . .	418
3.2.4	Інтерлівінговий добуток . . . . .	421
3.2.5	Паралельні композиції ЗТС . . . . .	422
3.2.6	Взаємодія через спільні змінні . . . . .	425
3.3	ВЕРИФІКАЦІЯ . . . . .	429
3.3.1	Специфікації ТС і логіки . . . . .	429
3.3.2	Лінійно-часові властивості . . . . .	430
3.3.3	Трасова еквівалентність . . . . .	437
3.3.4	Властивість безпеки й інваріанти . . . . .	439
3.3.5	Властивість безпеки . . . . .	441
3.3.6	Властивість живучості . . . . .	446
3.3.7	Властивість справедливості . . . . .	450
3.3.8	Стратегії справедливості . . . . .	457
3.3.9	Справедливість і безпека . . . . .	459
3.3.10	Регулярні властивості ТС . . . . .	462
3.3.11	Перевірка регулярних властивостей ТС . . . . .	463
3.3.12	Верифікація регулярних властивостей безпеки . . . . .	466
<b>4</b>	<b>АНАЛІЗ ПРИРОДНОЇ МОВИ</b>	<b>474</b>
4.1	ЛОГІКИ І ПРИРОДНІ МОВИ . . . . .	474
4.2	ІНТЕНСІОНАЛЬНІ ЛОГІКИ.	
	КАТЕГОРІЙНИЙ ПІДХІД . . . . .	479
4.2.1	Область інтерпретації . . . . .	479
4.2.2	Модальна логіка предикатів . . . . .	480
4.2.3	Типізована екстенціональна логіка . . . . .	484
4.2.4	Типізована мова $L_1$ . . . . .	493
4.2.5	Логічна мова вище першого порядку . . . . .	495
4.2.6	Мультимодальна мова $L_m$ . . . . .	498
4.2.7	Типізована інтенціональна логіка . . . . .	501
<b>5</b>	<b>ДОДАТКОВІ РОЗДІЛИ ДЛЯ ЗАСТОСУВАНЬ</b>	<b>511</b>
5.1	ПРОБЛЕМА УНІФІКАЦІЇ . . . . .	511
5.1.1	Стандартна нотація . . . . .	512
5.1.2	Уніфікація в $\emptyset$ -теорії . . . . .	516
5.1.3	Уніфікація в непорожніх $E$ -теоріях . . . . .	517
5.1.4	Уніфікація у спеціальних теоріях . . . . .	518

5.1.5	Уніфікація в абелевих моноїдах . . . . .	520
5.1.6	Загальна АК-уніфікація . . . . .	525
5.1.7	Уніфікація в комутативних кільцях з одиницею . . . . .	529
5.1.8	$D$ -уніфікація . . . . .	530
5.1.9	Метчинг-проблема . . . . .	531
5.2	$L_3$ -ЛОГІКИ КЛІНІ І БОЧВАРА . . . . .	532
5.3	ЗОБРАЖЕННЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ . . . . .	536
5.3.1	Упорядковані бінарні діаграми розв'язків . . . . .	536
5.3.2	Упорядкування і редукція БДР . . . . .	537
5.3.3	Залежність від порядку змінних . . . . .	539
5.3.4	Операції на УБДР . . . . .	540
5.3.5	Побудова УБДР . . . . .	543
5.3.6	Часові й робочі характеристики . . . . .	548
5.3.7	Зображення математичних об'єктів . . . . .	549
5.3.8	Квантифікована булева логіка . . . . .	549
5.3.9	Скінченні множини . . . . .	550
5.3.10	Відношення на скінченних множинах . . . . .	552
5.3.11	Зображення скінченних систем . . . . .	553
<b>6</b>	<b>ВІДПОВІДІ ДО ВИБРАНИХ ВПРАВ</b> . . . . .	<b>557</b>
	Список літератури . . . . .	586
	Предметний покажчик . . . . .	600